NPDEs with nonstandard growth conditions

Stanislav Antontsev
CMAF, Universidade de Lisboa

anton@ptmat.fc.ul.pt
antontsevsn@mail.ru

Resumo

We present an overview of the recent advances in the theory of elliptic, parabolic and hyperbolic nonlinear partial differential equations with nonstandard growth conditions (ENSGC). Typical representative of parabolic equations with anisotropic nonlinearity and nonstandard growth conditions has the form

$$u_t = \sum_i D_i \left[a_i(z,u)|u|^{\alpha_i(z)}|D_i u|^{p_i(z)-2} D_i u + b_i(z,u) \right] + d(z,u),$$

$z = (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T], \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

The coefficients $\alpha_i, p_i, a_i,\ p_i,\ b_i,\ d$ are given functions of their arguments. Such equations occur in the mathematical modelling of various physical phenomena, e.g., the flows of electro-rheological fluids or fluids with temperature–dependent viscosity, processes of filtration through inhomogeneous anisotropic media. We consider the existence and uniqueness of weak energy solutions for ENSGC and study the localization (vanishing) properties and blow up of such solutions.

The study of the localization and blow up properties is performed with the method of local energy estimates [1]. The detailed proofs can be found in [2]-[7].

Referências

[1] ANTONTSEV S. N., DÍAZ J. I., SHMAREV S. I. *Energy Methods for Free Boundary Problems:Applications to Non-linear PDEs and Fluid Mechanics*. Bikhäuser, Boston, 2002. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 48.

[2] ANTONTSEV S. N. *Wave equation with p(x,t)-Laplacian and damping term: Blow-up of solutions*, C.R. Mecanique, 339, 12(2011),751–755.

[3] ANTONTSEV S. N. *Wave equation with p(x,t)- Laplacian and damping term: Existence and blow-up*, Differ. Equ. Appl., 3 (2011), pp. 503–525.

[4] ANTONTSEV S. N., SHMAREV S. I. *Blow-up of solutions to parabolic equations with nonstandard growth conditions*. J. Comput. Appl. Math., 234 (2010), pp. 2633–2645.

[5] ANTONTSEV S. N., SHMAREV S. I. *Anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity*. Publicacions. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona, (2009), pp. 355–499.

[6] ANTONTSEV S. N., SHMAREV S. I. *Elliptic equations with anisotropic nonlinearity and nonstandard growth conditions*. Handbook of Differential Equations. Stationary Partial Differential Equations. Vol.3, Chapter 1, pp.1-100, Elsevier, 2006.

[7] ANTONTSEV S. N., SHMAREV S. I., *Vanishing solutions of anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 362(2010), 371-491.

Existência de um multiplicador de Lagrange num problema com restrição não constante no gradiente

Fernando Miranda
DMA e CMAT, Universidade do Minho

fmiranda@math.uminho.pt

Resumo

Nesta apresentação mostramos que, dados $f \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$, com φ estritamente positivo, o problema

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \left(\lambda \nabla u\right) = f \ &\text{ em } \mathscr{D}'(\Omega), \\ u = 0 \ &\text{ em } \partial\Omega, \\ |\nabla u| \leq \varphi \ &\text{ q.s. em } \Omega, \\ \lambda \geq 1 \ &\text{ em } L^\infty(\Omega)', \\ (\lambda - 1)(|\nabla u| - \varphi) = 0 \ &\text{ em } L^\infty(\Omega)', \end{aligned}$$

tem solução $(u, \lambda) \in W^{1,\infty}(\Omega) \times L^\infty(\Omega)'$.

Mostra-se também que a solução u do problema anterior é solução da inequação variacional

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (v - u) \geq \int_\Omega f(v - u), \quad \forall v \in \mathbb{K}_\varphi^\nabla,$$

onde $\mathbb{K}_\varphi^\nabla = \{v \in H_0^1(\Omega) : |\nabla v| \leq \varphi \text{ q.s. em } \Omega\}$.

Este trabalho foi realizado em colaboração com Assis Azevedo e Lisa Santos.

Resultados de existência para fluidos viscosos e incompressíveis

Hermenegildo Oliveira
Departamanto de Matemática e CMAF
Universidade do Algarve e Universidade de Lisboa

holivei@ualg.pt

Resumo

Nesta palestra iremos falar sobre a existência de soluções fracas para as equações generalizadas de Navier-Stokes que governam escoamentos de fluidos viscosos e incompressíveis, também conhecidos por problemas não-Newtonianos. Vamos começar pela cronologia dos resultados de existência para os problemas clássicos deste tipo (com estrutura constante e isotrópica), desde o primeiro resultado que remonta a 1967 até ao mais recente de 2010. A seguir iremos fazer uma incursão nos resultados de existência para os mesmos problemas, mas onde o tensor das tensões de Cauchy tem uma estrutura isotrópica mas variável. Neste caso, o estudo iniciou-se mais recentemente e ainda estão problemas em aberto. Finalmente, vamos falar sobre novos resultados de existência para classe de problemas, mas onde o termo dissipativo tem uma estrutura anisotrópica.

Equações diferenciais estocásticas forward-backward: estudo assintótico e um princípio de grandes desvios

André Gomes
GFM, Universidade de Lisboa

adeoliveiragomes@sapo.pt

Resumo

Nesta apresentação, estudaremos o comportamento assintótico quando $\varepsilon \to 0$ das Equações Diferenciais Estocásticas Forward-Backward acopladas (designadas FBSDE por simplicidade):

$$\begin{cases} X_s^{t,\varepsilon,x} = x + \int_t^s f(r, X_r^{t,\varepsilon,x}, Y_r^{t,\varepsilon,x})\mathrm{d}r + \sqrt{\varepsilon}\int_t^s \sigma(r, X_r^{t,\varepsilon,x}, Y_r^{t,\varepsilon})\mathrm{d}Br \\ Y_s^{t,\varepsilon,x} = h(X_t^{t,x,\varepsilon}) + \int_s^T g(r, X_r^{t,\varepsilon,x}, Y_r^{t,\varepsilon,x}, Z_r^{t,\varepsilon,x})\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,\varepsilon,x}\mathrm{d}Br \\ x \in \mathbb{R}^d;\ 0 \le t \le s \le T \end{cases}$$

Dentro do espírito da fórmula de *Feynman-Kac*, $u^\varepsilon(t,x) = Y_{t,x}^{\varepsilon,t,x}$ é solução de uma equação com derivadas parciais parabólica quasilinear. Quando $f(s,x,y) = y$ e $\sigma = I$ a equação parabólica torna-se uma equação Backward regressiva

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{\varepsilon}{2}\Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + g^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon(T,x) = h(x) \\ x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Usando a reversibilidade temporal, somos conduzidos à equação de Burgers, um importante modelo simplificado da Hidrodinâmica para a turbulência, que descreve o movimento de um fluído compressível com um parâmetro de viscosidade $\frac{\varepsilon}{2}$ sob a influência de uma força externa g. A nossa intenção é apresentar um estudo probabílistico para este problema, usando as conexões entre as FBSDEs e as Equações com Derivadas Parciais Parabólicas Quasilineares.
Ainda, estabeleceremos um Princípio de Grandes Desvios para as leis das soluções do sistema de FBSDEs.

Este é um trabalho conjunto com Ana Bela Cruzeiro (GFM, Universidade de Lisboa e IST, Universidade Técnica de Lisboa).

Behaviour of some 3rd order pde's

Joaquim Correia
Departamento de Matemática, CIMA e CAMGSD
Universidade de Évora e Universidade de Lisboa

jmcorreia@uevora.pt

Resumo

We are concerned with zero limits for nonlinear hyperbolic conservation laws since dissipative and dispersive small scale effects of diffusion and capillarity are under consideration. We consider the behaviour and selection of both the right models and the physical solutions. We intend to focus on technical difficulties we need to overcome to prove a general "vanishing viscosity-capillarity method" and comment on the analytical proof of such a convergence for nonlinear generalized Korteweg-de Vries equations. This was first conjectured by Y. Brenier and D. Levy, based upon by numerical evidence [Dissipative behavior of some fully non-linear KdV-type equations, Physica D 137 (2000)].

Problema de camada limite: equações de Navier-Stokes e de Euler

Nikolai Chemetov
Departamento de Matemática e CMAF, Universidade de Lisboa

chemetov@ptmat.fc.ul.pt

Resumo

Neste trabalho é considerado um fluido viscoso e incompressível num domínio limitado bidimensional com fronteiras permeáveis. O movimento do fluido é descrito pelas equações de Navier-Stokes e a impermeabilidade é caracterizada por uma condição de fronteira do tipo "Navier-slip". O objetivo deste trabalho consiste no estudo assimptótico do fluido viscoso (quando a viscosidade tende para zero) o qual é fundamental para a compreensão do fenómeno da turbulência nas camadas limite. É provado que o fluxo limite corresponde a soluções das equações de Euler com a mesma condição de fronteira sobre as regiões de entrada de fluxo.

Trabalho conjunto com Fernanda Cipriano (cipriano@cii.fc.ul.pt).

Redução de deslocamentos lineares fracionários a deslocamentos canónicos e aplicações

Lina Campos
Escola Secundária de Loulé

linacampos1@hotmail.com

Resumo

Ao homeomorfismo $\alpha : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ chama-se deslocamento, onde Γ é uma curva simples orientada, fechada ou aberta. Assume-se que α tem derivada α', que satisfaz a condição de Hölder e $\alpha'(t) \neq 0$, para todo o $t \in \Gamma$.

O deslocamento α que satisfaz a propriedade

$$\exists n \in \mathbb{N} : \qquad \alpha_n(t) = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \cdots \circ \alpha}_{n \text{ vezes}}(t) \equiv t$$

é usualmente conhecido como um deslocamento de Carleman. O menor natural n que verifica a igualdade anterior é a ordem de α. Se α não satisfaz a propriedade de Carleman, então será referido como um deslocamento de não-Carleman. Esta classificação dos deslocamentos em Carlemanianos e não-Carlemanianos é muito importante em alguns domínios como, por exemplo, a teoria dos operadores integrais singulares com deslocamento. Uma das classes mais estudadas é a dos deslocamentos lineares fracionários, cuja forma geral é bem conhecida. Na primeira parte da comunicação será feita uma exaustiva classificação dos deslocamentos lineares fracionários na circunferência unitária em deslocamentos de Carleman e de não-Carleman. Esta classificação terá também em consideração se o respetivo deslocamento preserva ou inverte a orientação do contorno. De seguida, será introduzido o conceito de deslocamentos canónicos e mostraremos que o estudo de qualquer deslocamento linear fracionário pode ser reduzido ao estudo de um dos deslocamentos canónicos. Por último, apresentaremos uma aplicação dos resultados anteriores ao estudo de uma classe de operadores integrais singulares com deslocamento linear fracionário.

Baseado num trabalho conjunto com Amarino Lebre (alebre@math.ist.utl.pt), Juan Carlos Rodríguez (Universidade do Algarve, jsanchez@ualg.pt) e Rui Carlos Marreiros (Universidade do Algarve, rmarrei@ualg.pt).

Sobre uma estimativa para a dimensão do núcleo de um operador integral singular com deslocamento não Carlemaneano

Rui Marreiros
Departamento de Matemática e CEAF
Universidade do Algarve e Universidade Técnica de Lisboa

rmarrei@ualg.pt

Resumo

Vamos considerar o operador $T = I - cUP_+ \colon\ L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(\mathbb{R})$ na reta real, onde I é o operador de identidade, $c \in C^{n\times n}(\overset{\circ}{\mathbb{R}})$ é uma função matricial contínua em $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, a recta real compatificada a um ponto, $(U\varphi)(t) = \varphi(t+\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$, é o operador de deslocamento, e $P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$ são os operadores de projeção complementares, com $(S\varphi)(t) = (\pi i)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\tau)(\tau - t)^{-1} d\tau$ o operador de integração singular com núcleo de Cauchy. É suposto que todos os valores próprios da matriz $c(t)$ em ∞ se encontrem simultaneamente, ou no interior do círculo unitário $\mathbb{T}_+$, ou no seu exterior $\mathbb{T}_-$. Nestas condições são obtidas estimativas para a dimensão do núcleo do operador T. Obtemos estimativas análogas, em condições similares, para um operador com coeficiente polinomial relativamente ao operador de deslocamento.

Esta comunicação é baseada em trabalhos conjuntos do autor com Viktor Kravchenko.

Otimização dos valores próprios do Laplaciano

Pedro Freitas
Faculdade de Motricidade Humana e GFM
Universidade Técnica de Lisboa e Universidade de Lisboa

freitas@cii.fc.ul.pt

Resumo

Passados 135 anos sobre a publicação do livro "The Theory of Sound" de Rayleigh, e 100 anos sobre a determinação por Weyl do comportamento assimptótico dos valores próprios do Laplaciano, muito pouco progresso foi feito no que diz respeito à otimização das diferentes frequências em função da forma, com exceção dos primeiros dois modos.

Iremos apresentar alguns resultados recentes que combinam técnicas numéricas e analíticas para a determinação desses ótimos e de algumas das suas propriedades. Em particular, mostraremos que, no caso de condições fronteira de Robin, o comportamento assintótico dos ótimos é inferior ao que é dado pela fórmula de Weyl para cada domínio.

Limite assintótico de soluções num problema parabólico de dinâmica populacional

Hugo Tavares
CMAF, Universidade de Lisboa

hugorntavares@gmail.com

Resumo

Neste seminário iremos estudar o limite assintótico de soluções positivas do problema

$$\partial_t u - \Delta u = au - b(x)u^p \text{ em } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \ \ u(0) = u_0, \ u(t)|_{\partial\Omega} = 0$$

quando $p \to +\infty$, onde Ω é um domínio limitado e $b(x) \geq 0$. Deduzimos que a configuração limite satisfaz um problema do obstáculo parabólico e de seguida estudamos o seu comportamento quando $t \to +\infty$.

Dimensão de Hausdorff e espaços de Besov

António Caetano
Departamento de Matemática e CIDMA, Universidade de Aveiro

acaetano@ua.pt

Resumo

A propósito de um resultado recente que dá uma estimativa ótima para a maior dimensão de Hausforff possível para gráficos de funções contínuas pertencentes a certos espaços de Besov sobre certos fractais, indica-se como a estrutura de wavelets de tais espaços se adequa bem ao cálculo dessas estimativas.